

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

МОСКОВСКАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Линейная алгебра»**

**Направление 080100 Экономика**

**для подготовки студентов-бакалавров очного отделения**

**Автор-составитель программы**

**Попеленский Федор Юрьевич, к.ф.-м.н.**

Учебная программа утверждена  
решением Ученого совета МШЭ МГУ  
Протокол № от «\_\_»\_\_\_\_\_2013 года

Москва

2013

## Введение

Изучение курса «Линейная алгебра» предназначено для формирования и усвоения знаний, умений и навыков в области линейной алгебры, используемой в дальнейшем в курсах эконометрики, методов оптимальных решений и других; для формирования представлений об области применимости методов линейной алгебры; для развития общей математической культуры; для формирования представлений о единстве математического знания, в частности, на основе тесных связей с курсом математического анализа.

Рабочая программа соответствует учебному плану подготовки бакалавров (магистров) по направлению 080100 «Экономика»

Основные задачи преподавания дисциплины:

- ознакомление студентов с основами линейной алгебры
- раскрытие роли изучаемой дисциплины в общем блоке математических дисциплин и в блоке экономических дисциплин
- изучение основных понятий и объектов, важнейших теоретических фактов линейной алгебры.
- привитие практических навыков исследования и решение задач линейной алгебры.
- формирование основ представлений об области применимости методов линейной алгебры в задачах экономического содержания.

Требования к знаниям и умениям по дисциплине:

***Знать:***

- основные определения и понятия, основные теоретические факты и основные вычислительные алгоритмы линейной алгебры

- теоретические обоснования и границы применимости изучаемых методов линейной алгебры

***Уметь***

- грамотно выделять и формализовать частные задачи линейной алгебры;

- применять теоретические знания и практические навыки для решения таких задач:

***Владеть:***

- основными методами решения практических задач линейной алгебры

***Иметь представление:***

- о простейших моделях экономического содержания

Практическая реализация учебной программы предусматривает проведение аудиторных занятий в виде лекций, семинаров, консультаций и организации самостоятельной работы студентов. Промежуточный контроль осуществляется в процессе обучения, преимущественно на семинарских занятиях в виде контрольных работ и коллоквиумов. По результатам промежуточного контроля проставляются текущие оценки. Итоговый контроль проводится в форме предварительного анализа суммы промежуточных оценок и выведения результирующей оценки путем проведения экзамена (в конце первого полугодия) и экзамена (в конце второго полугодия).

***Общий объем*** аудиторных занятий по данному курсу – 140 часов, в том числе 70 часов – лекции, 70 часов – семинары.

Итоговый контроль – в форме экзаменов по окончании I и II семестров.

### Учебно-тематический план

п/п	Наименование темы	Всего часов	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
	<b>Раздел 1. Введение в аналитическую геометрию</b>				
	Тема 1. Введение.	2	2	0	
	Входная контрольная работа.	6	0	2	4
	Тема 2. Прямые на плоскости.	8	2	2	4
	Тема 3. Векторы на плоскости.	12	2	2	8
	Тема 4. Скалярное произведение на плоскости.	8	2	2	4
	<i>Итого по разделу 1</i>	36	8	8	20
	<b>Раздел 2. Системы линейных уравнений.</b>	0			
	Тема 1. Системы линейных уравнений.	12	2	2	8
	Тема 2. Однородные и неоднородные системы.	8	2	2	4
	<i>Итого по разделу 2</i>	20	4	4	12
	<b>Раздел 3. Матрицы, операции над ними.</b>	0			
	Тема 1. Операции над матрицами.	8	2	2	4
	Тема 2. Определитель, след.	8	2	2	4
	Тема 3. Обратная матрица.	8	2	2	4
	<i>Итого по разделу 3</i>	24	6	6	12
	<b>Раздел 4. Векторные пространства</b>	0			
	Тема 1. Векторные пространства.	12	2	2	8

	Тема 2. Наборы векторов.	8	2	2	4
	Тема 3. Подпространства.	8	2	2	4
	<i>Итого по разделу 4</i>	28	6	6	16
	<b>Раздел 5. Замена координат.</b>	0			
	Тема 1. Замена базиса.	8	2	2	4
	Тема 2. Кривые второго порядка.	8	2	2	4
	<i>Итого по разделу 5</i>	16	4	4	8
	Анализ и разбор экзаменационных вопросов.	8	4	4	
	<b><i>Итого за I семестр:</i></b>	132	32	32	68
	<b>Раздел 6. Линейные операторы</b>	0			
	Тема 1. Линейные операторы.	16	4	4	8
	Тема 2. Замена базиса.	12	2	2	8
	Тема 3. Обратимые линейные операторы.	12	2	2	8
	<i>Итого по разделу 6</i>	40	8	8	24
	<b>Раздел 7. Собственные векторы и собственные значения.</b>	0			
	Тема 1. Евклидовы пространства.	12	2	2	8
	Тема 2. Собственные векторы и собственные значения симметрического оператора.	12	2	2	8
	Тема 3. Диагонализуемость.	8	2	2	4
	<i>Итого по разделу 7.</i>	32	6	6	20
	<b>Раздел 8. Квадратичные формы.</b>	0			
	Тема 1. Квадратичные формы	10	2	2	6
	Тема 2. Знакоопределенность	12	2	2	8

	Тема 3. Классификация кривых и поверхностей второго порядка.	8	2	2	4
	<i>Итого по разделу 8.</i>	30	6	6	18
	<b>Раздел 9. Приложения.</b>	0			
	Тема 1. Оптимизационные задачи.	24	8	8	8
	Тема 2. Матричные вычисления.	18	6	6	6
	<i>Итого по разделу 9.</i>	42	14	14	14
	Анализ и разбор экзаменационных вопросов.	12	4	4	4
	<b><i>Итого за II семестр:</i></b>	156	<b>38</b>	<b>38</b>	<b>80</b>
	<b>Всего по курсу:</b>	<b>288</b>	<b>70</b>	<b>70</b>	<b>148</b>

# ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

## Раздел 1. Введение в аналитическую геометрию

Представление о задачах линейной алгебры, возникающих в простейшей экономической модели двухотраслевой экономики. Аналитическая геометрия плоскости. Задание фигур уравнениями и неравенствами: прямая, полуплоскость, окружность, круг, угол, отрезок. Окружность. Уравнение окружности. Прямые, уравнение прямой  $y=kx+b$ ,  $ax+by+c=0$ . Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Перпендикулярные прямые. Взаимное расположение двух прямых, соответствующая система линейных уравнений. Взаимное расположение прямой и окружности, касание.

Векторы на плоскости, операции над векторами, коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Понятие о линейной зависимости, линейной комбинации. Системы двух уравнений с двумя неизвестными. Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление длин и углов. Проекция вектора на ось (другой вектор). Перпендикуляр. Площадь параллелограмма и треугольника, определитель второго порядка. Нормальный и направляющий векторы прямой. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Середина отрезка, деление отрезка в данном отношении.

## Раздел 2. Системы линейных уравнений.

Системы линейных уравнений. Равносильные системы. Матрицы. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Базисные и свободные переменные. Теорема Кронекера-Капелли. Нетривиальная совместность однородной системы уравнений. Общее решение неоднородной системы. Параметризация пространства решений. Фундаментальное решение. Сравнение с маломерным случаем.

## Раздел 3. Матрицы, операции над ними.

Матрицы. Действия над ними: транспонирование, сложение, умножение на число, произведение. Нулевая и единичная матрицы. Диагональные, симметрические матрицы. Свойства операций. Определители и их свойства. Методы вычисления определителей. След матрицы, его свойства. Связь определителя с рангом. Поведение определителя, следа и ранга при умножении матриц. Матрицы вида  $X'X$  и  $XX'$ . Миноры. Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы через алгебраические дополнения и с помощью присоединенной матрицы. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера. Двухотраслевая модель Леонтьева.

#### **Раздел 4. Векторные пространства**

Векторные пространства. Арифметическое  $\mathbb{R}^n$ . Операции с векторами, их свойства. Линейно зависимые/независимые системы векторов. Базис и размерность пространства. Подпространства векторного пространства. Линейная оболочка системы векторов. Ранг системы векторов, вычисление ранга методом элементарных преобразований и с помощью миноров. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, базис в пространстве решений однородной системы, методы построения. Подпространство, размерность, пересечение и сумма подпространств.

#### **Раздел 5. Замена координат и преобразование уравнений.**

Новый и старый базисы. Матрица перехода. Новые и старые координаты. Преобразование уравнений. Понятие о классификации. Эллипс, гипербола, парабола. Некоторые сведения о кривых второго порядка.

### **Семестр 2.**

#### **Раздел 6. Линейные операторы.**

Понятие о линейном операторе. Примеры (оператор проектирования и т.п.). Матрица линейного оператора. Композиция операторов и произведение матриц. Образ, ядро, ранг оператора. Преобразование матрицы оператора при замене базисов. Операторы из  $n$ -мерного пространства в себя. Обратимость. Связь с соответствующей системой линейных уравнений, с определителем и рангом. Матрица обратного оператора.

#### **Раздел 7. Собственные векторы и собственные значения.**

Скалярное произведение в  $n$ -мерном пространстве. Неравенство Коши—Буняковского. Ортонормированный базис. Ортогональный базис. Ортогонализация. Понятие о скалярном произведении в  $\mathbb{R}^n$ . Ортогональные матрицы и ортогональные преобразования. Сохранение ортогональным преобразованием следа матрицы вида  $XX'$ , где  $X$  – вектор-столбец. Собственные числа, собственные векторы. Характеристический многочлен. Методы решения характеристических уравнений. Вещественность собственных значений. Ортогональность собственных векторов. Собственные подпространства. Идемпотентные самосопряженные операторы и идемпотентные матрицы. Диагонализуемость симметрического оператора в базисе из собственных векторов. Возведение диагонализуемой матрицы в степень и извлечение из нее квадратного корня. Разложение Холецкого.

## **Раздел 8. Квадратичные формы.**

Квадратичная форма, матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (произвольным невырожденным преобразованием, ортогональным преобразованием). Положительно (отрицательно) определенные формы. Критерий Сильвестра. Ортогональные операторы, примеры. Нахождение главных осей эллипса и эллипсоида. Приведение уравнения кривой или поверхности в каноническому виду. Классификация. Невырожденные случаи. Ортогональное дополнение. Проекция вектора на подпространство. Связь с теоремами о двух и трех перпендикулярах.

## **Раздел 9. Приложения методов линейной алгебры.**

Метод наименьших квадратов. Метод главных компонент. Сравнение его с МНК. Общий случай, отличия от случая симметрических операторов. Запись линейной и квадратичной функции в матричном виде. Матричный вид их производных. Блочные матрицы. Операции с блочными матрицами. Вычисление определителя, обратная матрица. Кронекерово произведение матриц, его свойства.

# **Учебно-тематический план занятий**

## **Семестр 1**

### **Лекция 1. Введение.**

Представление о задачах линейной алгебры, возникающих в простейшей экономической модели двухотраслевой экономики. Аналитическая геометрия плоскости. Координатные оси, координаты точек, расстояние между точками. Задание фигур равенствами и неравенствами, прямая, полуплоскость, окружность, круг, угол, отрезок. Окружность. Уравнение окружности.

### **Лекция 2. Прямые на плоскости.**

Прямые, уравнение прямой  $y=kx+b$ ,  $ax+by+c=0$ . Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки. Перпендикулярные прямые. Взаимное расположение двух прямых, соответствующая система линейных уравнений. Взаимное расположение прямой и окружности, касание.

### **Лекция 3. Векторы на плоскости.**

Векторы на плоскости, операции над векторами, коллинеарные векторы, разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Понятие о линейной зависимости, линейной комбинации. Системы двух уравнений с двумя неизвестными.

#### **Лекция 4. Скалярное произведение на плоскости.**

Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление длин и углов. Проекция вектора на ось (другой вектор). Перпендикуляр. Площадь параллелограмма и треугольника, определитель второго порядка. Нормальный и направляющий векторы прямой. Различные виды уравнения прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Середина отрезка, деление отрезка в данном отношении.

#### **Лекция 5. Системы линейных уравнений.**

Системы линейных уравнений. Равносильные системы. Матрицы. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Базисные и свободные переменные. Теорема Кронекера-Капелли. Нетривиальная совместность однородной системы уравнений.

#### **Лекция 6. Неоднородные системы линейных уравнений**

Общее решение неоднородной системы. Параметризация пространства решений. Фундаментальное решение. Сравнение с маломерным случаем.

#### **Лекция 7. Операции над матрицами.**

Матрицы. Действия над ними: транспонирование, сложение, умножение на число, произведение. Нулевая и единичная матрицы. Диагональные, симметрические матрицы. Свойства операций.

#### **Лекция 8. Определитель и след, свойства, связь с рангом.**

Определители и их свойства. Методы вычисления определителей. След матрицы, его свойства. Связь определителя с рангом. Поведение определителя, следа и ранга при умножении матриц. Матрицы вида  $X'X$  и  $XX'$ . Миноры.

#### **Лекция 9. Обратная матрица.**

Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы через алгебраические дополнения и с помощью присоединенной матрицы. Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера. Двухотраслевая модель Леонтьева.

#### **Лекция 10. Векторные пространства**

Векторные пространства. Арифметическое  $\mathbb{R}^n$ . Операции с векторами, их свойства. Линейно зависимые/независимые системы векторов. Базис и размерность пространства. Подпространства векторного пространства. Линейная оболочка системы векторов.

### **Лекция 11. Наборы векторов, их свойства.**

Ранг системы векторов, вычисление ранга методом элементарных преобразований и с помощью миноров. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, базис в пространстве решений однородной системы, методы построения.

### **Лекция 12. Подпространства.**

Подпространство, размерность, пересечение и сумма подпространств.

### **Лекция 13. Замена координат.**

Новый и старый базисы. Матрица перехода. Новые и старые координаты. Преобразование уравнений. Понятие о классификации.

### **Лекция 14. Кривые второго порядка.**

Эллипс, гипербола, парабола. Некоторые сведения о кривых второго порядка.

### **Лекции 15-16. Резерв.**

Анализ и повторение сложных тем по результатам контрольных работ.

## **Семестр 2.**

### **Лекция 1. Линейные операторы.**

Понятие о линейном операторе. Примеры (оператор проектирования и т.п.). Матрица линейного оператора. Композиция операторов и произведение матриц. Образ, ядро, ранг оператора.

### **Лекция 2. Линейные операторы и замена базисов.**

Преобразование матрицы оператора при замене базисов.

### **Лекция 3. Обратимые линейные операторы.**

Операторы из  $n$ -мерного пространства в себя. Обратимость. Связь с соответствующей системой линейных уравнений, с определителем и рангом. Матрица обратного оператора.

### **Лекция 4. Евклидовы пространства.**

Скалярное произведение в  $n$ -мерном пространстве. Неравенство Коши—Буняковского, Ортонормированный базис. Ортогональный базис. Ортогонализация. Понятие о скалярном произведении в  $\mathbb{R}^n$ . Ортогональные матрицы. Сохранение ортогональным преобразованием следа матрицы вида  $XX'$ , где  $X$  – вектор-столбец.

### **Лекция 5. Собственные векторы и собственные значения симметрического оператора.**

Собственные числа, собственные векторы. Характеристический многочлен. Методы решения характеристических уравнений. Вещественность собственных значений. Ортогональность собственных векторов. Собственные подпространства. Идемпотентные самосопряженные операторы.

### **Лекция 6. Диагонализуемость.**

Диагонализуемость симметрического оператора в базисе из собственных векторов. Возведение диагонализуемой матрицы в степень и извлечение из нее квадратного корня. Разложение Холецкого.

### **Лекция 7. Квадратичные формы.**

Квадратичная форма, матрица квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду (произвольным невырожденным преобразованием, ортогональным преобразованием).

### **Лекция 8. Знакоопределенные формы.**

Положительно (отрицательно) определенные формы. Критерий Сильвестра. Ортогональные операторы, примеры. Нахождение главных осей эллипса и эллипсоида.

### **Лекция 9. Классификация кривых и поверхностей второго порядка.**

Приведение уравнения кривой или поверхности в каноническому виду. Классификация. Невырожденные случаи.

### **Лекция 10. Ортогональная проекция.**

Ортогональное дополнение. Проекция вектора на подпространство. Связь с теоремами о двух и трех перпендикулярах.

### **Лекция 11. Методы НК и главных компонент.**

Метод наименьших квадратов. Метод главных компонент. Сравнение его с МНК.

### **Лекция 12. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.**

Общий случай, отличия от случая симметрических операторов.

**Лекция 13. Матричное дифференцирование.**

Запись линейной и квадратичной функции в матричном виде. Матричный вид их производных.

**Лекция 14. Блочные матрицы.**

Блочные матрицы. Операции с блочными матрицами. Вычисление определителя, обратная матрица. Кронекерово произведение матриц, его свойства.

**Лекция 15-16. Подготовка к экзамену.**

Повторение сложного материала по результатам контрольных работ.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Практикум по высшей математике для экономистов* под ред. Кремера Н.Ш.
2. Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре.*
3. Гельфанд. И.М. *Лекции по линейной алгебре.*
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра*
5. Айвазян С.А. *Основы эконометрики (том 2, приложение)*
6. Малугин В.А. *Математика для экономистов. Линейная алгебра. Курс лекций*
7. Малугин В.А. *Математика для экономистов. Линейная алгебра. Задачи и упражнения*

## СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

8. Винберг Э.Б. *Курс алгебры*