

**Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова**

**МОСКОВСКАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**«Теория вероятностей и математическая статистика»**

**Направление 080100 Экономика**

**для подготовки студентов очного отделения**

**Авторы – составители программы:**

Макаров Алексей Алексеевич, кандидат физ.-мат. наук

Курбацкий Алексей Николаевич, кандидат физ.-мат. наук

Учебная программа утверждена

решением Ученого совета МШЭ МГУ

Протокол № от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2013 г.

**Москва**

**2013**

## **ВВЕДЕНИЕ**

Изучение курса «Теория вероятностей и математическая статистика» предназначено для формирования и усвоения знаний, умений, навыков в области экономической теории и практики, которые необходимы для работы в государственных и частных структурах, а также развития профессиональных качеств, компетенций, необходимых для выполнения функциональных обязанностей в сфере экономики. Рабочая программа соответствует учебному плану подготовки бакалавров (магистров) по направлению 080100 «Экономика».

### **Основные задачи преподавания дисциплины:**

- ознакомление студентов с основными концепциями теории вероятностей и прикладной статистики,
- раскрытие роли вероятностно-статистического инструментария в экономических исследованиях,
- изучение основных понятий вероятностного анализа, таких как случайные события и вероятности их осуществления, случайные величины и распределения, а также основных теорем теории вероятностей; изучение основ статистического описания данных, постановок и методов решения фундаментальных задач математической статистики, таких как задача оценивания, задача проверки гипотез; изучение основ анализа парных зависимостей,
- формирование вероятностной интуиции, опирающейся на теоретические знания, развитие навыков постановки и решения прикладных задач статистического анализа,
- демонстрация математической обоснованности ряда процедур вероятностного и статистического анализа и понимание границ их применимости,
- привитие практических навыков в использовании математических методов вероятностного и статистического анализа к постановке и решению задач, возникающих из экономической практики.

### **Требования к знаниям и умениям по дисциплине:**

**знать**

- основные определения и понятия теории вероятностей и математической статистики,
- основы методики применения вероятностных и статистических методов,
- содержание теоретико-вероятностного способа рассуждений в прикладной статистике и эконометрике,
- основные типы распределений вероятностей, используемых в статистическом анализе,
- прикладные аспекты предельных теорем теории вероятностей, в том числе — применительно к теории оптимального оценивания и проверки гипотез.

#### **уметь**

- свободно производить аналитические действия со случайными событиями и вероятностями их осуществления,
- применять методы статистического и вероятностного анализа в задачах, возникающих из экономической практики,

#### **владеть**

- основными аналитическими приемами вероятностного и статистического анализа,
- навыками численного расчета основных характеристик, возникающих при проведении вероятностного и статистического анализа в задачах, возникающих из экономической практики,

#### **иметь представление:**

- об основах применения математико-статистического инструментария в исследовании социально-экономических объектов, в анализе реальных статистических данных, возникающих при наблюдении за социально-экономическим объектом.

Практическая реализация учебной программы предусматривает проведение аудиторных занятий в виде лекций, практикумов, семинаров, консультаций и организации самостоятельной работы студентов.

Промежуточный контроль осуществляется в процессе обучения, преимущественно на семинарских занятиях в виде контрольных работ и коллоквиумов. По результатам промежуточного контроля проставляются текущие оценки.

Итоговый контроль проводится в форме предварительного анализа суммы промежуточных оценок и выведения результирующей оценки путем проведения **экзамена** (в конце первого полугодия) и **экзамена** (в конце второго полугодия).

Дисциплина изучается в течение одного учебного года при общем объеме учебной нагрузки 288 часов. Итоговый контроль – в форме

экзамена в конце I полугодия,

экзамена в конце II полугодия.

## Учебно-тематический план

№	Название раздела, темы	Всего часов	Лекции	Практические занятия	самостоятельная работа <sup>i</sup>
	<b>Раздел I. Введение. Пространство элементарных событий и определение вероятности.</b>				
	Тема 1. Введение. Понятие случайного эксперимента. Элементарные события. Пространство элементарных событий. События.	9	2	1	6
	Тема 2. Дискретное и непрерывное пространство элементарных событий.	6	1	1	4
	Тема 3. Вероятности в дискретных пространствах, вероятности в непрерывных пространствах (плотность вероятности). Примеры.	6	1	1	4
	Тема 4. Вероятность и практика. Объективная (частотная) и субъективная (персональная) вероятность.	6	1	1	4
	Тема 5. Операции с событиями, связь с вероятностями (формула сложения).	6	1	1	4
	Тема 6. Независимые события, независимые случайные эксперименты.	6	1	1	4
	Тема 7. Испытания Бернулли.	6	1	1	4
	Тема 8. Условные	6	1	1	4

вероятности, формула умножения. Формула полной вероятности, формула Байеса.				
Контрольная работа по разделу I.	1	0	1	
<i>Итого по разделу I</i>	52	9	9	34
<b>Раздел II. Случайные величины.</b>				
Тема 1. Случайные эксперименты и случайные величины. Дискретные случайные величины. Биномиальное распределение, распределение Пуассона. Их роль в естествознании и экономике. Измерение вероятности: частота события как приближенное значение вероятности.	10	3	1	6
Тема 2. Непрерывные случайные величины. Примеры: показательное и нормальное распределения. Их роль в естествознании и экономике.	9	2	1	6
Тема 3. Преобразования случайных величин. Функции распределения.	9	2	1	6
Тема 4. Числовые характеристики случайных величин:  Математическое ожидание случайной величины и его	9	2	1	6

свойства. Дисперсия случайной величина и её свойства.				
Тема 5. Совместные распределения двух или нескольких случайных величин случайных. Маргинальные распределения. Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия суммы.				
Тема 6. Коэффициент корреляции и его свойства.				
Тема 7. Двумерное нормальное распределение: плотность распределения, маргинальные распределения, независимость и корреляция. Условное распределение одной переменной при фиксированном значении другой; условное математическое ожидание, условная дисперсия. Регрессия одной переменной по другой.	9	2	1	6
Контрольная работа по разделу II.				
<i>Итого по разделу II.</i>	9	2	1	6
<b>Раздел III. Предельные закономерности теории вероятностей.</b>	7	2	1	4

Тема 1. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Бернулли, измерение вероятности. Расчёт необходимого объёма случайной выборки. Теорема Чебышева. Сходимость по вероятности.	2	0	2	0
Тема 2. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра-Лапласа (интегральная). Классическая центральная предельная теорема. Теорема Пуассона для испытаний Бернулли. Закон малых чисел. Сходимость по распределению.	60	11	9	40
Контрольная работа по разделу III.				
Коллоквиум.	8	2	2	4
Анализ и разбор экзаменационных вопросов.	8	2	2	4
<i>Итого по разделу III.</i>				
<b><i>Итого за I семестр:</i></b>	<b>144</b>	<b>28</b>	<b>26</b>	<b>90</b>
<b>Раздел IV. Проверка статистических гипотез.</b>	1	1	0	0
Тема 1. Принципы проверки статистических гипотез на примере испытаний Бернулли.	32	8	8	16
Тема 2. Критерий знаков для парных наблюдений.				

Тема 3. Ранги и их свойства для случайных выборок.				
Тема 4. Критерий ранговых сумм Уилкоксона для проверки гипотезы о однородности двух независимых выборок. Статистика Манна–Уитни. Распределение статистик Манна – Уитни и Уилкоксона для малых и для больших выборок.	12	4	2	6
Контрольная работа по разделу IV.	10	2	2	6
<i>Итого по разделу IV.</i>	10	2	2	6
<b>Раздел V. Оценивание параметров.</b>	10	2	2	6
Тема 1. Метод наибольшего правдоподобия. Примеры его применения: выборки из показательного и нормального распределений.	6	0	2	4
Тема 2. Состоятельность оценок наибольшего правдоподобия (аргументация с помощью закона больших чисел и неравенства из теории информации)	48	10	10	28
Тема 3. Свойства выборочных средних и дисперсий для нормальных выборок.				
Тема 4. Доверительные интервалы для параметров	10	2	2	6

нормального распределения. Доверительные интервалы как статистическая форма точности приближения.				
Тема 5. Методы наибольшего правдоподобия и наименьших квадратов для простой линейной регрессии.	10	2	2	6
Тема 6. Анализ одной и двух нормальных выборок. Критерий Стьюдента.	10	2	2	6
Контрольная работа по разделу V.	10	2	2	6
Коллоквиум по разделам IV, V.	10	2	2	6
<i>Итого по разделу V.</i>	10	2	2	6
<b>Раздел VI. Связь признаков.</b>	2	0	2	0
Тема 1. Выборочный коэффициент корреляции. Проверка с его помощью гипотезы о независимости гауссовских признаков.	2	2	0	0
Тема 2. Выборка из двумерного нормального распределения. Доверительные интервалы для коэффициента корреляции. Преобразование Фишера.	64	14	14	36
Тема 3. Коэффициенты ранговой корреляции. Проверка с их помощью гипотезы о независимости				

признаков. Распределение коэффициентов ранговой корреляции для малых и для больших выборок.				
Тема 4. Случайные испытания с несколькими исходами. Критерий хи-квадрат (К.Пирсон) для проверки простых и сложных гипотез о вероятностях.	6	2	2	2
Тема 5. Таблицы сопряженности: проверка гипотезы о независимости признаков.	6	2	2	2
Тема 6. Статистические основы выборочных обследований: простой случайный выбор, выбор из расслоенных совокупностей.	6	2	2	2
Контрольная работа по разделу VI.	5	2	1	2
<i>Итого по разделу VI.</i>	<i>32</i>	<i>10</i>	<i>10</i>	<i>12</i>
Анализ и разбор экзаменационных вопросов.	2	2	0	0
<b><i>Итого за II семестр:</i></b>	<b>144</b>	<b>34</b>	<b>34</b>	<b>76</b>
<b>Всего по курсу:</b>	<b>288</b>	<b>62</b>	<b>60</b>	<b>166</b>

## ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

**Раздел I.** Введение. Понятие случайного эксперимента. Элементарные события. Пространство элементарных событий. События. Дискретное и непрерывное пространство элементарных событий. Вероятности в дискретных пространствах, вероятности в непрерывных пространствах (плотность вероятности). Примеры. Вероятность и практика. Объективная (частотная) и субъективная (персональная) вероятность. Операции с событиями, связь с вероятностями (формула сложения). Независимые события, независимые случайные эксперименты. Испытания Бернулли. Условные вероятности, формула умножения. Формула полной вероятности, формула Байеса.

**Раздел II.** Случайные эксперименты и случайные величины. Дискретные случайные величины. Биномиальное распределение, распределение Пуассона. Их роль в естествознании и экономике. Измерение вероятности: частота события как приближенное значение вероятности. Непрерывные случайные величины. Примеры: показательное и нормальное распределения. Их роль в естествознании и экономике. Преобразования случайных величин. Функции распределения. Числовые характеристики случайных величин: Математическое ожидание случайной величины и его свойства. Примеры. Дисперсия случайной величины и её свойства. Примеры. Совместные распределения двух или нескольких случайных величин случайных. Маргинальные распределения. Независимые случайные величины. Математическое ожидание и дисперсия суммы. Коэффициент корреляции и его свойства. Двумерное нормальное распределение: плотность распределения, маргинальные распределения, независимость и корреляция. Условное распределение одной переменной при фиксированном значении другой; условное математическое ожидание, условная дисперсия. Регрессия одной переменной по другой.

**Раздел III.** Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Бернулли, измерение вероятности. Расчёт необходимого объёма случайной выборки. Теорема Чебышева. Сходимость по вероятности. Центральная предельная теорема. Теорема Муавра-Лапласа (интегральная). Классическая

центральная предельная теорема. Теорема Пуассона для испытаний Бернулли. Закон малых чисел. Сходимость по распределению.

#### **Раздел IV. Проверка статистических гипотез.**

Принципы проверки статистических гипотез на примере испытаний Бернулли. Минимальный уровень значимости. Понятие об ошибках первого и второго рода. Мощность критерия. Критерий знаков для парных наблюдений. Ранги и их свойства для случайных выборок. Критерий ранговых сумм Уилкоксона для проверки гипотезы о однородности двух независимых выборок. Статистика Манна – Уитни. Распределение статистик Манна – Уитни и Уилкоксона при гипотезе для малых и для больших выборок.

#### **Раздел V. Оценивание параметров.**

Точечное оценивание параметров. Свойства оценок. Функция правдоподобия. Метод наибольшего правдоподобия. Примеры его применения: выборки из показательного и нормального распределений. Состоятельность оценок наибольшего правдоподобия (аргументация с помощью закона больших чисел и неравенства из теории информации). Свойства выборочных средних и дисперсий для нормальных выборок. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Доверительные интервалы как статистическая форма точности приближения. Методы наибольшего правдоподобия и наименьших квадратов для простой линейной регрессии. Анализ одной и двух нормальных выборок. Критерий Стьюдента.

#### **Раздел VI. Связь признаков**

Выборочный коэффициент корреляции. Проверка с его помощью гипотезы о независимости гауссовских признаков. Выборка из двумерного нормального распределения. Доверительные интервалы для коэффициента корреляции. Преобразование Фишера. Коэффициенты ранговой корреляции. Проверка с их помощью гипотезы о независимости признаков. Распределение (при гипотезе) коэффициентов ранговой корреляции для малых и для больших выборок. Случайные испытания с несколькими

исходами. Критерий хи-квадрат (К.Пирсон) для проверки простых и сложных гипотез о вероятностях. Таблицы сопряженности: проверка гипотезы о независимости признаков. Статистические основы выборочных обследований: простой случайный выбор, выбор из расслоенных совокупностей.

# Учебно-тематический план занятий

## Семестр 1

### **Лекция 1. Введение.**

Введение. Понятие случайного эксперимента. Элементарные события. Пространство элементарных событий. События. ([1], глава 1, §1.)

### **Лекция 2. Понятие вероятности.**

Вероятности в дискретных пространствах, вероятности в непрерывных пространствах (плотность вероятности). Примеры. ([1], глава 1, §2.)

### **Лекция 3. Вероятность и практика.**

Вероятность и практика. Объективная (частотная) и субъективная (персональная) вероятность([1], глава 1, §2.)

### **Лекция 4. Операции с событиями.**

Операции с событиями, связь с вероятностями (формула сложения). ([1], глава 1, §1-2.)

### **Лекция 5. Понятие независимости.**

Независимые события, независимые случайные эксперименты. ([1], глава 1, §3.)

### **Лекция 6. Схема Бернулли.**

Испытания Бернулли. ([1], глава 1, §3.)

### **Лекция 7. Условная вероятность.**

Условные вероятности, формула умножения. Формула полной вероятности, формула Байеса. ([1], глава 1, §3.)

Контрольная работа по разделу I.

### **Лекция 8. Понятие дискретной случайной величины.**

Случайные эксперименты и случайные величины. Дискретные случайные величины. Биномиальное распределение, распределение Пуассона. Их роль в естествознании и экономике. Измерение вероятности: частота события как приближенное значение вероятности. ([1], глава 2, §1; глава 3, §1-2.)

### **Лекция 9. Понятие непрерывной случайной величины.**

Непрерывные случайные величины. Примеры: показательное и нормальное распределения. Их роль в естествознании и экономике. ([1], глава 2, §1; глава 3, §3-4.)

### **Лекция 10. Понятие функции распределения.**

Преобразования случайных величин. Функции распределения. ([1], глава 2, §1.)

### **Лекция 11. Числовые характеристики случайных величин.**

Числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание случайной величины и его свойства. Примеры. Дисперсия случайной величины и её свойства. Примеры. ([1], глава 2, §2.)

### **Лекция 12. Совместное распределение.**

Совместные распределения двух или нескольких случайных величин случайных. Маргинальные распределения. Независимые случайные

величины. Математическое ожидание и дисперсия суммы. ([1], глава 2, §3.)

### **Лекция 13. Ковариация и корреляция.**

Ковариация и ее свойства. Коэффициент корреляции и его свойства.

Ковариационная матрица. ([1], глава 2, §3.)

### **Лекция 14. Двумерное нормальное распределение.**

Двумерное нормальное распределение: плотность распределения, маргинальные распределения, независимость и корреляция. Условное распределение одной переменной при фиксированном значении другой; условное математическое ожидание, условная дисперсия. Регрессия одной переменной по другой. ([1], глава 3, §5.)

Контрольная работа по разделу II.

### **Лекция 16. Закон больших чисел.**

Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Бернулли, измерение вероятности. Расчёт необходимого объёма случайной выборки. Теорема Чебышева. Сходимость по вероятности. ([1], глава 4, §1-2.)

### **Лекция 17. Центральная предельная теорема.**

Центральная предельная теорема. Теорема Муавра-Лапласа (интегральная). Классическая центральная предельная теорема. Теорема Пуассона для испытаний Бернулли. Закон малых чисел. Сходимость по распределению. ([1], глава 4, §3-4.)

Контрольная работа по разделу III. Коллоквиум.

## **Лекция 17. Резерв.**

Анализ и повторение сложных тем по результатам контрольных работ и коллоквиума.

## **Семестр 2.**

### **Лекция 1. Проверка статистических гипотез.**

Принципы проверки статистических гипотез на примере испытаний Бернулли. ([2], глава 3, §3.1-3.4.)

### **Лекция 2. Критерий знаков.**

Критерий знаков для парных наблюдений. ([2], глава 3, §3.6.1.)

### **Лекция 3. Ранг наблюдения.**

Ранги и их свойства для случайных выборок. ([2], глава 1, §1.8.)

### **Лекция 4. Критерии Уилкоксона и Манна-Уитни.**

Критерий ранговых сумм Уилкоксона для проверки гипотезы о однородности двух независимых выборок. Статистика Манна–Уитни. Распределение статистик Манна–Уитни и Уилкоксона для малых и для больших выборок. ([2], глава 3, §3.5.)

Контрольная работа по разделу IV.

### **Лекция 5. Оценивание параметров.**

Метод наибольшего правдоподобия. Примеры его применения: выборки из показательного и нормального распределений. ([2], глава 4, §4.4-4.7.)

### **Лекция 6. Свойства оценок.**

Несмещенность, состоятельность, эффективность. Состоятельность оценок наибольшего правдоподобия. Аргументация с помощью закона больших чисел и неравенства из теории информации. ([2], глава 4, §4.1-4.4.)

### **Лекция 7. Оценки параметров нормального распределения.**

Свойства выборочных средних и дисперсий для нормальных выборок. ([2], глава 5, §5.1-5.3.)

### **Лекция 8. Доверительный интервал.**

Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Доверительные интервалы как статистическая форма точности приближения. ([2], глава 4, §4.5-4.7.)

Контрольная работа по разделу V.

### **Лекция 9. Простая линейная регрессия.**

Методы наибольшего правдоподобия и наименьших квадратов для простой линейной регрессии. ([2], глава 8, §8.1-8.4.)

### **Лекция 10. Анализ одной и двух нормальных выборок.**

Анализ одной и двух нормальных выборок. Критерий Стьюдента. ([2], глава 5, §5.1-5.5.)

Контрольная работа по разделу V.

Коллоквиум по разделам IV, V.

### **Лекция 11. Связь признаков.**

Выборочный коэффициент корреляции. Проверка с его помощью гипотезы о независимости гауссовских признаков. ([2], глава 9, §9.4-9.5.)

### **Лекция 12. Выборка из двумерного нормального распределения.**

Выборка из двумерного нормального распределения. Доверительные интервалы для коэффициента корреляции. Преобразование Фишера. ([2], глава 9, §9.5.)

### **Лекция 13. Коэффициент ранговой корреляции.**

Коэффициенты ранговой корреляции. Проверка с их помощью гипотезы о независимости признаков. Распределение коэффициентов ранговой корреляции для малых и для больших выборок. ([2], глава 9, §9.1-9.6.)

### **Лекция 14. Критерий Пирсона.**

Случайные испытания с несколькими исходами. Критерий хи-квадрат (К.Пирсон) для проверки простых и сложных гипотез о вероятностях. ([2], глава 10, §10.1, 10.4-10.5.)

### **Лекция 15. Проверка гипотезы о независимости признаков.**

Таблицы сопряженности: проверка гипотезы о независимости признаков. ([2], глава 9, §9.3-9.7.)

### **Лекция 16. Статистические основы выборочных обследований.**

Статистические основы выборочных обследований: простой случайный выбор, выбор из расслоенных совокупностей. ([2], глава 1, §1.7-1.9; глава 11.)

Контрольная работа по разделу VI.

**Лекция 17. Резерв.**

Повтор сложного материала по результатам контрольных работ и подготовка к экзамену.

## Рекомендуемая литература

- [1] Тюрин Ю. Н., Макаров А.А., Симонова Г. И., Теория вероятностей: учебник для экономических и гуманитарных специальностей. -- М.: МЦНМО, 2009. - 256 с.
- [2] Тюрин Ю. Н., Макаров А.А., Анализ данных на компьютере: учебное пособие. - 4-е изд., перераб. - М.: ИД Форум, 2008. - 368 с., ил. - (Высшее образование).
- [3] Айвазян, С.А., Мхитарян, В.С. (2001) *Прикладная статистика и основы естествознания* (2-е изд.). Том 1: Теория вероятностей и прикладная статистика. — М.: ЮНИТИ, 656 с.
- [4] Айвазян, С.А., Мхитарян, В.С. (2001) *Прикладная статистика в задачах и упражнениях*. — М.: ЮНИТИ, 270 с.

## Дополнительная литература

- [5] Ивашев-Мусатов О. С., Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.пособие. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: ФИМА, 2003. - 224 с.
- [6] Фадеева Л. Н., Лебедев А. В., Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Эксмо, 2010. - 496 с. -- (Новое экономическое образование).